

求解带不可微项方程的 Newton– Moser 迭代的收敛性

肖胜中¹, 古伟清²

(1. 广东农工商管理学院, 广东 广州 510507; 2. 广东工业大学数理系, 广东 广州 501643)

摘要: 提出了 Newton– Moser 迭代法求解带不可微项方程的解的半局部收敛性定理, 并加以扼要证明.

关键词: 方程; 解; 迭代法; 半局部收敛性

中图分类号: O241.7

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2000)01-0088-04

设 X, Y 是 Banach 空间, f, g 是 $X \rightarrow Y$ 的非线性算子, $\bar{B}(x_0, R)$ 是 X 中心 x_0 为中心, R 为半径的闭球, f 在 $\bar{B}(x_0, R)$ 内 Frchet 可微, 且满足条件:

$$\text{I) } \|f'(x) - f'(y)\| \leq K(r) \|x - y\|,$$

$$x, y \in \bar{B}(x_0, r) \subset \bar{B}(x_0, R);$$

$$\text{II) } \|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon(R) \|x - y\|,$$

$$x, y \in \bar{B}(x_0, r).$$

考虑方程

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

的求解. 由于假设条件 I), II) 对方程(1)的要求不苛刻, 当 $g(x)$ 不可微时也行得通, 所以, 方程(1)的适用范围广, 近来对方程(1)的数值求解进行研究的人很多. 如王德人等^[1], 特别是 Zabrejko–Nguen^[2] 和 Zabrejko^[3] 对迭代

$$x_{n+1} = x_n - f'_{(x_n)}^{-1} \{f(x_n) + g(x_n)\}$$

和

$$x_{n+1} = x_n - A_0^{-1} \{f(x_n) + g(x_n)\}$$

分别建立了半局部收敛性定理, 其中 $A_0 = f'(x_0)$.

本文考虑下列迭代格式:

Newton–Moser 迭代

$$x_{n+1} = x_n - A_n \{f(x_n) + g(x_n)\},$$

$$A_{n+1} = 2A_n - A_n^2 f'(x_{n+1}). \quad (2)$$

由于这种迭代格式有许多优点, 所以, 很多人采用它. 本文对带不可微项方程(1)在假设 I), II) 下给出迭代格式(2)的半局部收敛性定理, 所得结果推广了王德人等^[1~3]的结果.

收稿日期: 1999-09-24

基金项目: 广东自然科学基金资助项目 (960110) .

作者简介: 肖胜中 (1966), 男, 33 岁, 讲师; 主要研究方向: 小波分析, 微分方程.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

1 Newton-Moser 迭代的收敛性

由于 Newton-Moser 迭代对于算子是否可逆不做要求. 因此, 该方法对许多问题的研究是方便的. 下面, 我们用优序列的方法研究它的收敛性.

取 $\varphi(t)$ 的表达式为

$$\varphi(t) = a + a_0^{-1}\theta t + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad \theta \in (0, 1], \quad (3)$$

其中

$$a = \|A_0^{-1}(f(x_0) + g(x_0))\| \quad a_0 = -\|A_0\|, \quad (4)$$

而 $A_0^{-1}: Y \rightarrow X$ 是 $f'(x_0)$ 的近似逆.

设

$$\Psi(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = \varphi(t) + \Psi(t).$$

用 $\bar{x}$ 表示 $x(t)$ 在区间 $[0, R]$ 上的极小值, $\bar{t}$ 为极小值点, 如果 $x(R) < 0$, 由 $x(t)$ 是严格单调的, 那么, $x(t)$ 在区间 $[0, \bar{t}]$ 上有唯一零点 t^* .

取 Newton-Moser 迭代的优序列为

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - a_n x(t_n), \\ a_{n+1} &= 2a_n - a_n^2 \phi(t_{n+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $t_0 = 0, a_0 = -\|A_0\|$.

2 收敛性证明

引理 1 若 $x(R) < 0$, 则对任何 $n \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ 为自然数集, 都有 $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq t^*$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^*$.

证明: 当 $n = 0$ 时, 显然成立.

设对 $n \leq k$ 时, 上述不等式成立. 则 $n = k+1$ 时, 由于 $x(t)$ 在区间 $[0, t^*]$ 上为正, $\phi(t)$ 在 $[0, t^*)$ 上单调增加且为负, 并且两者在 $[0, t^*)$ 上右端点连续, 所以有:

$$t_k \leq t_k - a_k x(t_k) = t_{k+1} \leq t^*.$$

因为

$$a_{k+1} = 2a_k - a_k^2 \phi(t_{k+1}) = [1 - (1 - a_k \phi(t_{k+1}))^2] / \phi(t_{k+1}) \geq \frac{1}{\phi(t_{k+1})},$$

又由于

$$1 - a_k \phi(t_{k+1}) \geq 1 - \frac{\phi(t_{k+1})}{\phi(t_k)} \geq 0,$$

所以

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_k(1 - a_k \phi(t_{k+1})) \leq a_k < 0, \\ 0 \leq |a_0| \leq |a_{k+1}| &\leq \frac{1}{|\phi(t_{k+1})|} \leq \frac{1}{|\phi(t^*)|}. \end{aligned}$$

故有:

$$x(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k) = 0.$$

由于已证得 $t_k \leq t^*$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ 及 $x(t)$ 在 $[0, t^*]$ 上的连续性有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t^*.$$

引理 2 若 $x(R) \leq 0$, 则由迭代(2)有:

$$1^\circ \quad \|A_n\| \leq a_n;$$

$$2^\circ \quad A_n \text{ 可逆};$$

$$3^\circ \quad \|A_n f'(x_n) - I\| \leq 1 - a_n \phi(t_n);$$

$$4^\circ \quad \|A_{n+1} A_n^{-1}\| \leq a_{n+1} a_n^{-1};$$

$$5^\circ \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n.$$

证明: 当 $n = 0$ 时 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ 显然成立.

由迭代(2)可得:

$$\begin{aligned} \|A_1 A_0^{-1} - I\| &= \|I - A_0 f'(x_1)\| \leq \\ &\|I - A_0 f'(x_0)\| + \|A_0(f'(x_1) - f'(x_0))\| \leq \\ &\|I - A_0 f'(x_0)\| + \|A_0\| \{\omega(t_1) - \omega(t_0)\} \leq \\ &1 - a_0 \phi(t_0) - a_0 \{\phi(t_1) - \phi(t_0)\} = \\ &1 - a_0 \phi(t_1) = a_0 \phi(t_1) [a_0^{-1} \phi^{-1}(t_1) - 1] \leq a_0^{-1} a_1 - 1. \end{aligned}$$

即当 $n = 0$ 时, 4° 成立.

假设 $n \leq k$ 时 $1^\circ \sim 5^\circ$ 成立, 则

$$\|A_{k+1} A_0^{-1}\| \leq \|A_{k+1} A_k^{-1}\| \|A_k A_{k-1}^{-1}\| \dots \|A_0^{-1} A_1\| \leq a_{k+1} a_k^{-1} \cdot a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_1 a_0^{-1} = a_{k+1} a_0^{-1}.$$

从而

$$\|A_{k+1}\| \leq \|A_{k+1} A_0^{-1}\| \cdot \|A_0\| \leq a_{k+1}.$$

可见 1° 对 $n = k+1$ 时成立.

由关系式

$$I - A_{k+1} f'(x_{k+1}) = (A_{k+1} A_k^{-1} - I)^2,$$

我们有:

$$\|I - A_{k+1} f'(x_{k+1})\| \leq \|A_{k+1} A_k^{-1} - I\|^2 = 1 - a_{k+1} \phi(t_{k+1})$$

即当 $n = k+1$ 时, 3° 成立. 又由

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i) = t_{k+1}, \text{ 知 } x_{k+1} \in \overline{B}(x_0, t_{k+1}).$$

由式(2)及归纳假设有:

$$\begin{aligned} \|A_{k+2}^{-1} A_{k+1}^{-1} - I\| &= \|I - A_{k+1} f'(x_{k+2})\| = \\ &\|I - A_{k+1} f'(x_{k+1}) - A_{k+1} \{f'(x_{k+2}) - f'(x_{k+1})\}\| \leq \\ &1 - a_{k+1} \phi(t_{k+1}) - a_{k+1} \{\omega(t_{k+2}) - \omega(t_{k+1})\} = \\ &1 - a_{k+1} \phi(t_{k+1}) - a_{k+1} \{\phi(t_{k+2}) - \phi(t_{k+1})\} = \\ &1 - a_{k+1} \phi(t_{k+2}) = a_{k+2} a_{k+1}^{-1} - 1 < 1. \end{aligned}$$

由摄动引理知, A_{k+2} 的逆存在, 所以 $\|A_{k+2}\| \neq 0$, 从而

$$\|A_{k+2} A_{k+1}^{-1}\| \leq a_{k+2} a_{k+1}^{-1}.$$

即 $2^\circ, 4^\circ$ 成立.

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| = \|A_{k+1} \{f(x_{k+1}) + g(x_{k+1})\}\| =$$

$$\begin{aligned}
& A_{k+1} \{ f(x_{k+1}) - f(x_k) - f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \} + \\
& A_{k+1} \{ f(x_k) - A_k^{-1} \} (x_{k+1} - x_k) + A_{k+1} \{ g(x_{k+1}) - g(x_k) \} \leq \\
& - a_{k+1} \int_0^t \{ \omega(t_k + \lambda(t_{k+1} - t_k)) - \omega(t_k) \} d\lambda(t_{k+1} - t_k) + \\
& a_{k+1} a_k^{-1} \{ 1 - a_k \phi(t_k) \} (t_{k+1} - t_k) - a_{k+1} \{ \Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k) \} = \\
& - a_{k+1} \Psi(t_{k+1}) = t_{k+2} - t_{k+1}.
\end{aligned}$$

所以, $\{t_n\}$ 为 $\{x_n\}$ 的优序列. 由上述引理, 我们立刻得出下述定理

定理 设 A_0^{-1} 存在, 且有 $\|I - A_0 g'(x_0)\| \leq 1 - \theta, 0 < \theta \leq 1$, 若 $x(R) \leq 0$, 则迭代(2) 对任何 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ 有意义, 且收敛于方程(1) 在闭球 $\bar{B}(x_0, t^*)$ 内唯一零点 x^* 且有:

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n.$$

证明: 由引理 1, 引理 2 及

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} (t_{i+1} - t_i) = t_{n+p} - t_n,$$

令 $p \rightarrow \infty$ 时有:

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n.$$

证毕.

参考文献:

- [1] 王德人, 林及旺. 关于 Newton- Moser 方法迭代的收敛性[J]. 计算数学学报, 1984, (6): 97~ 103.
- [2] Zabrejko P P, ngen D F. The majovant Methodin the theorg of Newton- Kantorovich appoximations and the patk error estimates[J]. Numer. Funct. Anal. Optim. 1987, (9): 671~ 684.
- [3] Zabrejko P P. on a generalization of the Newton- Penantovich method for an eqllation with non- differentiable operatov[J]. Ukr. Matw zhurn 1989, (34): 365~ 369.
- [4] 肖胜中, 郭子君. 求解带不可微项方程的 King- Werner 迭代的敛散性[J]. 华南农业大学学报, 1999, (20): 114 ~ 118.

Convergence of the Newton- Moser Iterative for Undifferentiable Nonlinear Equations

XIAO Sheng-zhong¹, GU Wei-qing²

(1. Guangdong AIBM Cardie College, GuangZhou 510507, China;

2. Guangdong University of Technology, Guangzhou 510643, China)

Abstract: A Semi- local convergence theory is proved for the Newton- Moser method. It is applied to undifferentiable nonlinear operator equations.

Key words: equation; solution; iteration method; semi- local convergence